PERTEMUAN KE-9

KODE : D10J-1002

ANALISIS DATA 1

PROGRAM STUDI ILMU AKTUARIA

SEMESTER	:	SATU
SKS	:	TIGA (3)
DOSEN	:	1. Anna Chadidjah
		2. Hasna Afifah R
TAHUN AKADEMIK	:	2020-2021
WAKTU KULIAH	:	Rabu, 07.30 -10.00 WIB

Materi pertemuan ke 6

Distribusi Peluang

Probability and Distribution

DISTRIBUSI PELUANG

ALAT MENGHITUNG PELUANG

1. Ratio banyaknya anggota ruang kejadian dengan banyaknya anggota ruang sampel

$$P(X = x) = \frac{n(X = x)}{n(S)}$$

- Diagram pohon
- Permutasi
- Kombinasi
- Aturan Perkalian
- Aturan Penjumlahan

2. Fungsi kepadatan peluang yakni fungsi yang digunakan untuk menghitung peluang berdasarkan pola distribusi peubah acak

Fungsi peluang

$$P(X = x)$$

Fungsi densitas

$$f(x)$$

Bagan keterkaitan

Eksperimen Acak

Misal

S = Ruang Sampel dan X = Ruang Kejadian

n(S) atau n(X)

$$P(X) = \frac{n(X)}{n(S)}$$

Transformasi ruang sampel dlm bilangan real

Peubah Acak (X)

Distribusi

Distribusi Peluang

X kontinu

fkp / *pdf*

f(x)

X diskrit

Fmp / *pmf*

P(X=x)

Peubah Acak

- Fungsi yang memetakan ruang sampel kedalam bilangan real

Contoh 1

Lempar sebuah uang logam tiga kali. Catat hasilnya, angka (A) atau gambar (G) untuk setiap lemparan.

- Ruang Sampel

$$S = \{GGG, GGA, GAG, AGG, GAA, AGA, AAG, AAA\}$$

- Jika X menyatakan banyaknya gambar (G), maka nilai yang mungkin dari $X = 0,1,2,3$

S	X
AAA	0
GAA, AGA, AAG	1
GGA, GAG, AGG	2
GGG	3

Contoh 2

Untuk peubah acak X pada contoh 1, tentukan distribusi peluangnya

S	X	$\mathbf{P}(X = \mathbf{x})$
AAA	0	1/8
GAA, AGA, AAG	1	3/8
GGA, GAG, AGG	2	3/8
GGG	3	1/8
	Jumlah	1

Definisi Peubah Acak

Secara umum, peubah acak dibagi menjadi dua yakni

Peubah acak diskrit, yakni apabila nilai dari peubah acak adalah bilangan bulat atau jika banyaknya titik sampel dari suatu ruang sampel berhingga banyaknya. Sebagai contoh banyaknya rumah yang sedang dibangun disuatu lokasi atau banyaknya orang yang di PHK.

Peubah acak kontinu, yakni apabila nilai dari peubah acak adalah pecahan, bilangan desimal, atau bilangan riil. Atau jika banyaknya titik sampel dari suatu ruang sampel tidak berhingga banyaknya. Sebagai contoh tinggi badan seseorang atau berat dari suatu barang.

Diskret atau Kontinu?

- Banyaknya kecelakaan motor per tahun di Jogja
- Lamanya waktu pertandingan sepak bola
- Banyaknya STNK yang dikeluarkan tiap bulan di kota tertentu
- Banyaknya gula yang dikonsumsi per keluarga tiap tahun

Arti Kejadian Diskret & Kontinu

- Suatu kejadian disebut kejadian **diskret** : bila pada setiap kejadian yg mungkin terjadi hanya menghasilkan suatu titik harga.
- Sedangkan bila suatu kejadian, baik setiap kejadian yg mungkin terjadi bisa menghasilkan sembarang harga yg ada pada suatu interval yg telah ditetapkan dikatakan sebagai kejadian yg **kontinu**.

Perbedaan peubah acak diskrit dan kontinu

X pa Diskrit

Fungsi peluang p(x) = P(X=x) dinamakan fungsi kepadatan peluang (probability mass functions)

Sifat fkp :

- $0 \leq p(x) \leq 1$
- $\sum_{x} p(x) = 1$

Fungsi Distribusi:

- $$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{X \leq x} p(x)$$

X pa Kontinu

Fungsi peluang f(X) dinamakan fungsi densitas (probability density functions)

Sifat fs. densitas :

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$

Fungsi Distribusi:

- $$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)$$

Formulasi Peluang

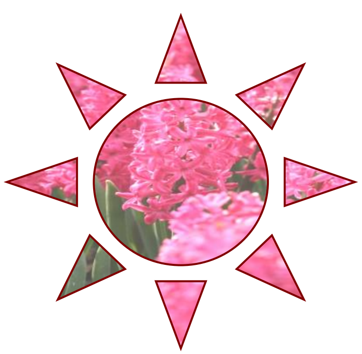
- $P(X \leq a) = 1 - P(X > a)$
- $P(X \geq a) = 1 - P(X < a)$
- $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a)$
- $P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a)$
- $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$
- $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a)$

Distribusi Peluang

X peubah acak

- **Diskrit**
  1. Bernoulli
  2. Binomial
  3. Geometric
  4. Hypergeometric
  5. Negative Binomial
  6. Poisson
  7. Uniform

- **Kontinu**
  1. Beta
  2. Chi-Square
  3. Exponensial
  4. Gamma
  5. Normal
  6. Uniform



DISTRIBUSI PELUANG DISKRIT

Distribusi Bernoulli

Fungsi Peluang	$P(X = x) = p^x (1-p)^{1-x}$
Nilai x	$x = 0,1$
Fungsi pembangkit momen	$M(t) = 1 - p + pe^t$
Mean	$\mu = p$
Variansi	$\sigma^2 = p(1-p)$
Parameter	p
Simbol Distribusi	$X \sim Bernoulli(p)$

Percobaan Bernoulli

Percobaan Bernoulli merupakan suatu percobaan yang mendapatkan dua hasil yaitu *sukses* dan *gagal*. Jika $X = 1$ menyatakan hasil sukses dan $X = 0$ menyatakan hasil gagal, maka probabilitas fungsi masa :

$$P\{X = 0\} = 1 - p$$

$$P\{X = 1\} = p$$

PMF is given by

$$p_X(x) = \begin{cases} 1 - p & x = 0 \\ p & x = 1 \end{cases}$$

dimana $p, 0 \leq p \leq 1$, probabilitas kejadian sukses

Distribusi Binomial

Fungsi Peluang	$P(X=x)=\dfrac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$
Nilai x	$x=0,1,2,\ldots,n$
Fungsi pembangkit momen	$M(t)=(1-p+pe^t)^n$
Mean	$\mu=np$
Variansi	$\sigma^2=np(1-p)$
Parameter	$n,\ p$
Simbol Distribusi	$X\sim b(n,p)$

Distribusi Binomial

Distribusi Binomial yaitu suatu usaha Bernoulli yang dapat menghasilkan sukses dengan probabilitas *p* dan gagal dengan probabilitas *q =1 - p*, maka didtribusi probabilitas variabel acak binomial, yaitu banyaknya sukses dalam n usaha bebas, adalah :

$$P(r\,\text{sukses dalam}\,n\,\text{percobaan}) = \frac{n!}{(n-r)!r!}q^{n-r}p^{r}$$

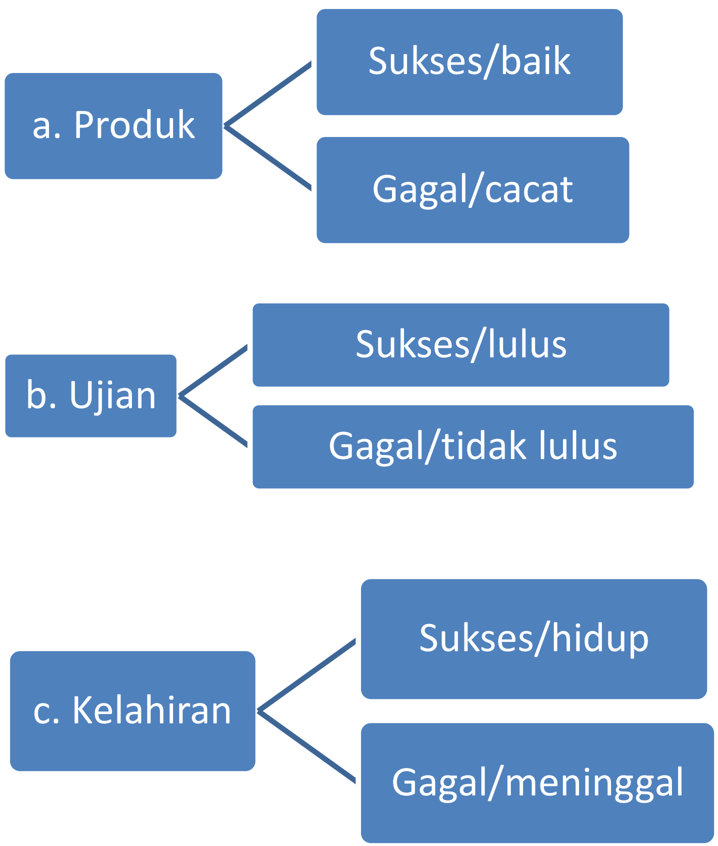
$$\text{Mean : } \mu = np$$

$$\text{Varians } : \sigma^2 = npq$$

$$\text{Simpangan baku} : \quad \sigma = \sqrt{npq}$$

Distribusi Binomial

- Ciri dari distribusi binomial adalah setiap kejadian hanya ada 2 kemungkinan terjadi
- Misal :



Contoh 3

Tentukan peluang mendapatkan 6 angka dalam sebuah percobaan melempar sebuah koin 10 kali

- n = 10
- p = 0.5
- X : peubah acak yang menyatakan banyaknya angka

$$P(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P(X = 6) = \frac{10!}{6!(10-6)!} 0.5^6 (1-0.5)^{10-6}$$

$$= 0.2051$$

Contoh 4:

- Suatu produk diambil 30 untuk diperiksa, ternyata ada 1 produk yang cacat. Bila kita membeli 10 produk berapa besar probabilitas bahwa dari 10 produk yang dibeli tersebut semua baik (tidak ada yang cacat)?

Jawab :

Kejadian produk hanya ada 2 kemungkinan, yaitu baik atau cacat, sehingga distribusi statistik teoritis yang cocok pada kejadian ini adalah distribusi binomial.

$$y = f(x) = P(x) = \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x}$$

dengan n=10 dan p =1/30

Bila kita menghendaki x=0, maka :

$$P(x=0) = \binom{10}{0} \left(\frac{1}{30}\right)^{0} \left(1 - \frac{1}{30}\right)^{10-0} = \left(\frac{29}{30}\right)^{10} = \ldots$$

Distribusi Negative Binomial

Fungsi Peluang	$P(X=x)=\binom{x-1}{r-1}p^{r}(1-p)^{x-r}$
Nilai x	$x=r, r+1, r+2, \ldots$
Fungsi pembangkit momen	$M(t)=\dfrac{\left(pe^{t}\right)^{r}}{\left[1-(1-p)e^{t}\right]^{r}};\ t<-\ln(1-p)$
Mean $\mu=r\left(\dfrac{1}{p}\right)$	**Variansi** $\sigma^{2}=\dfrac{r(1-p)}{p^{2}}$
Parameter	$n,\ r,\ p$
Simbol Distribusi	$X\sim Negbinom(n,r,p)$

Percobaan akan mengikuti distribusi binomial negatif jika:

1. Percobaan terdiri atas n usaha yang saling independen atau saling bebas, maksudnya hasil suatu percobaan tidak akan berpengaruh terhadap hasil percobaan selanjutnya.
2. Tiap percobaan hanya terdiri dari dua kejadian yang mungkin, sukses atau gagal.
3. Probabilitas sukses dan gagal untuk tiap percobaan adalah tetap, yaitu p dan probabilitas gagal adalah $1 - p$

Variabel random yang menyatakan banyaknya percobaan agar terjadi sukses ke- k merupakan variable random binomial negatif.

Contoh soal binomial negatif

Dalam suatu turnamen bola voli pertandingan dinyatakan berakhir jika salah satu tim sudah memperoleh tiga kali kemenangan. Missal tim A sedang berhadapan dengan tim B. bedasarkan data yang diperoleh dari pertandingan-pertandingan sebelumnya diperoleh bahwa $P(A\ menang) = 0.6$, pada tiap pertemuan dan anggap merupakan kejadian bebas. Berapakah peluang bahwa

pertandingan berakhir dalam empat pertemuan?

Diketahui: $x = 4\ pertandingan$ $\quad p_A = q_B = 0.6$

$r = 3\ kemenangan$ $\quad p_B = q_A = 0.4$

Ditanyakan: Peluang pertandingan berakhir pada empat pertemuan?

Pertandingan akan berakhir jika A menang atau B menang. Artinya, pertandingan akan berakhir jika A berhasil memperoleh 3 kali kemenangan atau B berhasil memperoleh 3 kali kemenangan.

$P(A$ menang dalam pertandingan$) + P(B$ menang dalam pertandingan$)$

Jawab: $P(A$ menang dalam pertandingan$) = b*(x;r,p_A) = \binom{x-1}{r-1}p^r q^{x-r}$

$$= b*(4;3{,}0.6) = \binom{4-1}{3-1}(0.6)^3(0.4)^{4-3}$$

$$= \binom{3}{2}(0.6)^3(0.4)^1$$

$$= \frac{3!}{2!}\,(0.216)(0.4)$$

$$= \frac{3.2!}{2!.1!}(0.0864)$$

$$= 3(0.0864)$$

$$= 0.2592$$

$P(B$ menang dalam pertandingan$) = b*(x;r,p_B) = \binom{x-1}{r-1}p^r q^{x-r}$

$$= b*(4;3{,}0.4) = \binom{4-1}{3-1}(0.4)^3(0.6)^{4-3}$$

$$= \binom{3}{2}(0.4)^3(0.6)^1$$

$$= \frac{3!}{2!}\,(0.064)(0.6)$$

$$= \frac{3.2!}{2!.1!}(0.0384)$$

$$= 3(0.0384)$$

$$= 0.1152$$

$P(A$ menang dalam pertandingan$) + P(B$ menang dalam pertandingan$) =$

$$0.2592 + 0.1152 = 0.3744$$

Distribusi Geometric

Fungsi Peluang	$P(X=x)=p(1-p)^{x-1}$
Nilai x	$x=1,2,\ldots$
Fungsi pembangkit momen	$M(t)=\dfrac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\quad ; t<-\ln(1-p)$
Mean	$\mu=\dfrac{1}{p}$
Variansi	$\sigma^2=\dfrac{1-p}{p^2}$
Parameter	p
Simbol Distribusi	$X \sim Geometric(p)$

Distribusi geometrik adalah kasus khusus dari distribusi binomial negatif untuk $r = 1$, yaitu distribusi peluang banyaknya percobaan yang diperlukan untuk mendapatkan sukses pertama.

Distribusi ini berpangkal pada percobaan Bernoulli dimana hanya terdapat dua kemungkinan yaitu sukses atau gagal, yang diulang berkali-kali sampai mendapatkan sukses pertama. Dimana setiap percobaan tidak akan berpengaruh pada percobaan selanjutnya.

Peluang seorang pemain basket memasukkan bola kedalam keranjang adalah 0.7. karena dilanggar oleh pemain lawan maka pemain tersebut mendapatkan hadiah “3 bola”. Jika masing-masing kesempatan untuk memasukkan bola kita anggap bebas, maka berapakah peluang bahwa pemain tadi pertama kali memasukkan bola pada kesempatan ketiga? Berapakah peluang

paling sedikit pemain tersebut memasukkan satu bola pada ketiga kesempatan?

Diketahui: p (kejadian sukses memasukkan bola ke dalam keranjang)= 0.7

$q = 1 - p = 1 - 0.7 = 0.3$

Misalkan "x adalah banyaknya percobaan untuk mendapatkan sukses pertama"

$x = 3$

Ditanyakan: a. $P(X = 3) = \cdots ?$

b. $P(X \leq 3) = \cdots ?$

Jawab: $P(X = x) = g(x; p) = pq^{x-1}$

$$P(X = 3) = g(3; 0.7) = (0.7)(0.3)^{3-1}$$

$$= (0.7)(0.3)^2$$

$$= (0.7)(0.09)$$

$$= 0.063$$

$$P(X \leq 3) = P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1)$$

$$= g(3; 0.7) + g(2; 0.7) + g(1; 0.7)$$

$$= (0.7)(0.3)^{3-1} + (0.7)(0.3)^{2-1} + (0.7)(0.3)^{1-1}$$

$$= 0.7\{(0.3)^2 + (0.3)^1 + (0.3)^0\}$$

$$= 0.7(0.09 + 0.3 + 1) = 0.7(1.39) = 0.973$$

Distribusi Hypergeometric

Fungsi Peluang	$P(X=x)=\dfrac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}}$
Nilai x	$x \le n,\ n \le N_1,\ n-x \le N_2$
Fungsi pembangkit momen	
Mean $\mu = n\left(\dfrac{N_1}{N}\right)$	**Variansi** $\sigma^2 = n\left(\dfrac{N_1}{N}\right)\left(\dfrac{N_2}{N}\right)\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$
Parameter	$n,\ N_1,\ N_2$
Simbol Distribusi	$X \sim Hipergeometry(n, N_1, N_2)$

Distribusi Hipergeometrik

- Setiap percobaan statistik keluaran yang telah dihasilkan obyeknya selalu dikembalikan, sehingga probabilitas setiap percobaan peluang seluruh obyek memiliki probabilitas yang sama.
- Dalam pengujian kualitas suatu produksi, maka obyek yang diuji tidak akan diikutkan lagi dalam pengujian selanjutnya, artinya tidak dikembalikan.

Distribusi Hipergeometrik

Probabilitas kejadian suatu obyek dengan tanpa dikembalikan

Distribusi Hipergeometrik

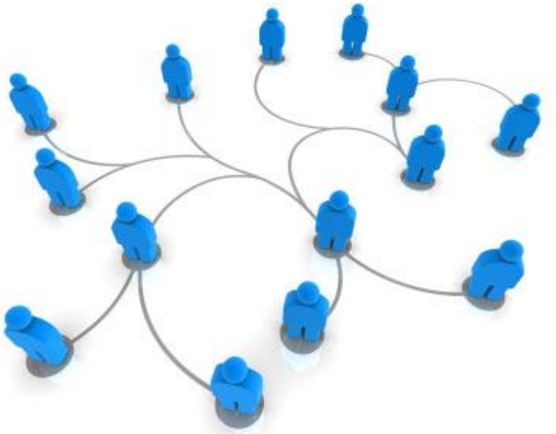
- Percobaan hipergeometrik memiliki sifat-sifat sebagai berikut:
  - sebuah pengambilan acak dengan ukuran n dipilih tanpa pengembalian dari N obyek
  - k dari N obyek dapat diklasifikasikan sebagai sukses dan N – k diklasifikasikan sebagai gagal.

Contoh Soal:

Sekelompok orang terdiri dari 50 orang dan 3 diantaranya lahir pada tanggal 1 Januari. Secara acak diambil 5 orang. Berapa peluangnya :

a. tidak ada yang lahir pada tanggal 1 Januari

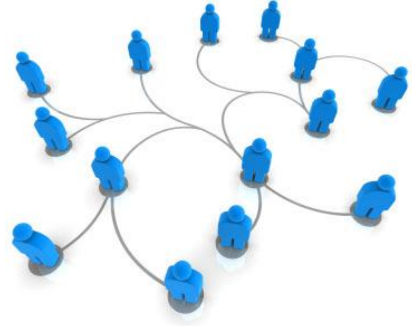
b. paling banyak 1 orang yang lahir tanggal 1 Januari



Jawab :

a. ambil X = banyak orang yang lahir tanggal 1 Januari dengan N = 50 , n = 5

$$h(0; 50, 5, 3) = \frac{\binom{3}{0}\binom{47}{5}}{\binom{50}{5}} = 0{,}724$$



b. X = 1

$$h(1;\,50,\,5,\,3) = \frac{\binom{3}{1}\binom{47}{4}}{\binom{50}{5}} = 0{,}253$$

Sehingga , peluang paling banyak 1 orang dari 5 yang lahir pada tanggal 1 Januari adalah $0{,}724 + 0{,}253 = 0{,}977$.

Distribusi Poisson

Fungsi Peluang	$P(X = x) = \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$
Nilai x	$x = 0,1,2,\ldots$
Fungsi pembangkit momen	$M(t) = \exp(\lambda(e^t - 1))$
Mean	$\mu = \lambda$
Variansi	$\sigma^2 = \lambda$
Parameter	λ
Simbol Distribusi	$X \sim Poisson(\lambda)$

Pendekatan Poisson pada Binomial

Syarat :

1. Rata-rata hitung (μ) = np
2. Varians (σ^2) = np (1-p)
3. Probabilitas sukses biasanya kecil mendekati nilai 0 , dan jumlah percobaan besar
4. Memiliki ciri distribusi binomial

Contoh 5

Example 1

A machine produces on average 2 per cent defectives. In a random sample of 60 items, dertermine the probability of there being three defectives.

Penyelesaian :

$$n = 60; \quad p = \frac{2}{100} = 0{\cdot}02 \qquad \mu = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\boxed{\mu = np = 60 \times 0{\cdot}02 = 1{\cdot}2}$$

$$P(x = 3) = \frac{e^{-\mu}\mu^3}{3!} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P = \frac{e^{-1\cdot 2}1{\cdot}2^3}{3!} = 0{\cdot}0867$$

Distribusi Uniform diskrit

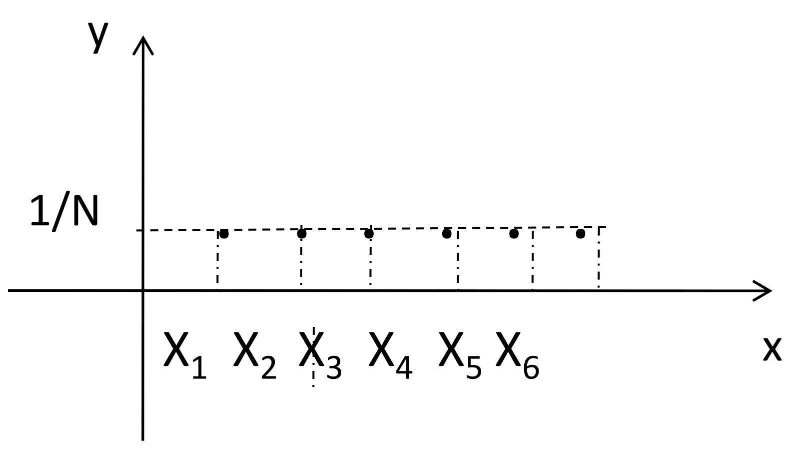
Fungsi Peluang	$P(X = x) = \dfrac{1}{m}$
Nilai x	$x = 1,2,3,\ldots,m$
Fungsi pembangkit momen	
Mean $\mu = \dfrac{m+1}{2}$	**Variansi** $\sigma^2 = \dfrac{m^2 - 1}{12}$
Parameter	m
Simbol Distribusi	$X \sim U(m)$

Distribusi Seragam (Uniform)

- Ciri dari distribusi uniform adalah setiap variabel randomnya mempunyai harga probabilitas yang sama.
- Fungsinya : **y=f(x)=P(x)=1/N**

  dimana N= banyaknya kejadian

Grafiknya :

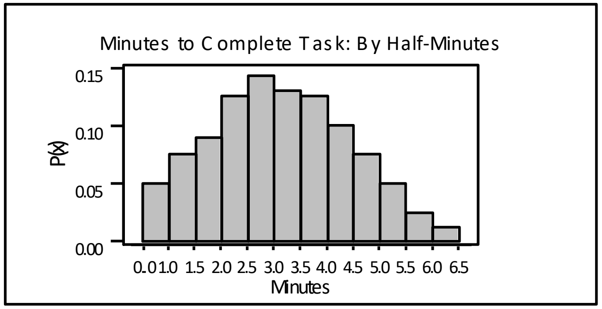


DISTRIBUSI PELUANG KONTINU

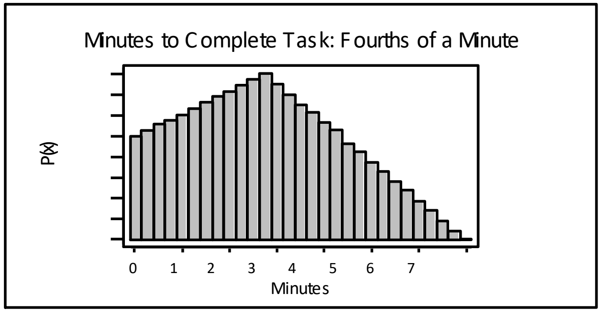
Dari Diskrit Menjadi Kontinu

Interval waktu dapat dibagi menjadi:

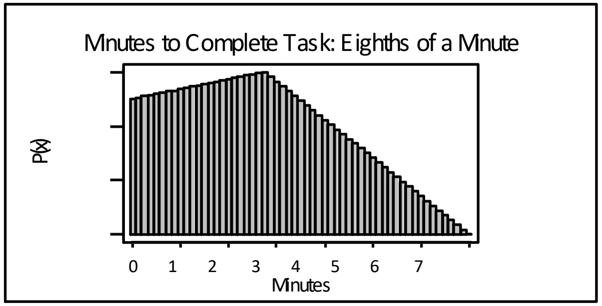
Interval 0.5 menit



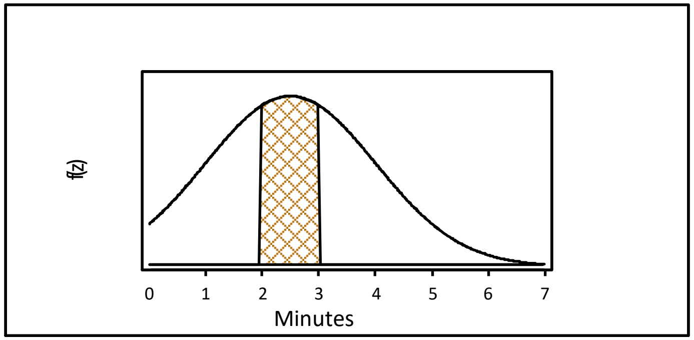
Interval 0.25 menit



Interval 0.125 menit



Interval kecil tak terbatas



Jika sebuah variabel random diskrit dibagi menjadi interval kecil yang tidak terbatas, maka perhitungan probabilitasnya ditentukan oleh sebuah rentang nilai dan nilai probabilitas adalah luas area di bawah kurva dalam rentang tersebut. Untuk contoh di samping, dinyatakan dengan $P(2 \leq X \leq 3)$.

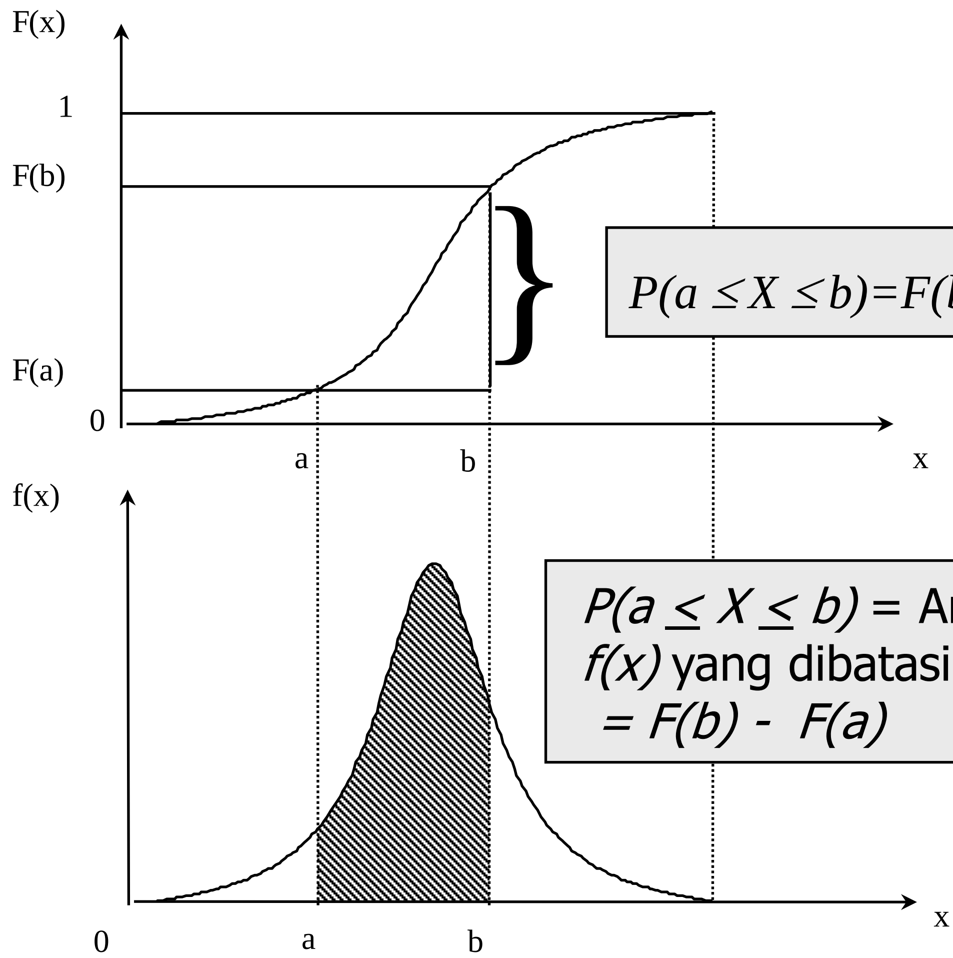
Variabel Random Kontinu

- **Variabel Random Kontinyu** adalah sebuah variabel random yang dapat berupa sembarang nilai pada suatu interval yang diamati.
- Probabilitas dari variabel random kontinu X ditentukan oleh sebuah **fungsi densitas,** dinotasikan dengan *f(x)*, dan memiliki beberapa sifat berikut.
  - $f(x) \geq 0$ untuk setiap nilai *x*.
  - Probabilitas bahwa X berada diantara dua nilai *a* dan *b* adalah sama dengan luas area dibawah *f(x)* yang dibatasi oleh *a* dan *b*.
  - Total luas area di bawah kurva *f(x)* adalah 1.00.

Fungsi Densitas dan Kumulatif

Fungsi kumulatif

Fungsi densitas



$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$

P(a ≤ X ≤ b) = Area di bawah *f(x)* yang dibatasi oleh *a* dan *b* = *F(b)* - *F(a)*

Derajat kebebasan

Makna DF :

1. Dalam kaitannya dengan distribusi statistic untuk memberikan nama dari salah satu parameternya.
2. Dalam kaitannya dengan kecocokan model, derajat kebebasan menunjuk pada jumlah informasi yang independen yang ada digunakan untuk membuat estimasi terhadap informasi yang lain.

Umumnya kita memulai jumlah derajat kebebasan dengan data. Semakin suatu prosedur atau model cocok, maka jumlah derajat kebebasan semakin kecil.

Penghitungan derajat kebebasan dilakukan melalui ukuran sampel. Derajat kebebasan merupakan pengukuran jumlah informasi dari data sample yang telah digunakan. Setiap penghitungan statistik dilakukan dari suatu sampel tertentu, maka satu derajat kebebasan digunakan.

Derajat kebebasan

Setiap rumus dalam SPSS cara menghitung derajat kebebasan (DF /Degree of Freedom) berbeda, misalnya dalam Chi Square untuk menghitung DF digunakan rumus (C-1) x (R -1); sedang untuk uji t sampel bebas untuk menghitung DF digunakan rumus n -2; untuk uji t sampel berpasangan untuk menghitung DF digunakan rumus n -1 dstnya.

Derajat kebebasan

Beberapa pengertian mengenai variabel akan diterangkan pada bagian ini, diantaranya: Variabel didefinisikan sebagai "*something that may vary or differ*" (Brown, 1998:7). Definisi lain yang lebih detil mengatakan bahwa variabel " *is simply symbol or a concept that can assume any one of a set of values*" (Davis, 1998:23).

Distribusi Uniform   X~U(a,b)

Fungsi densitas:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < X < b$$

Fungsi pembangkit momen:

$$M(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}; \quad t \neq 0; \quad M(0) = 1$$

Mean:

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

Variansi:

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribusi Eksponensial $X \sim \exp(\theta)$

Fungsi densitas:

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \quad 0 \le X < \infty$$

Fungsi pembangkit momen:

$$M(t) = \frac{1}{1-\theta t}; \quad t < \frac{1}{\theta}$$

Mean:

$$\mu = \theta$$

Variansi:

$$\sigma^2 = \theta^2$$

Contoh:

Misalkan suatu sistem mengandung sejenis komponen yang daya tahannya dinyatakan oleh variabel acak T yang berdistribusi eksponensial dengan parameter θ =5. Bila sebanyak 5 komponen tersebut dipasang dalam sistem yang berlainan, berapa peluang bahwa suatu komponen masih berfungsi pada tahun ke 8

- Jawab

Peluang bahwa suatu komponen tertentu masih akanberfungsi setelah 8 tahun:

$$P(T > 8) = \frac{1}{5}\int_{8}^{\infty} e^{-t/5} dt = e^{-8/5} = 0,2$$

Distribusi Chi-Square   X~ χ^2(r)

Fungsi densitas:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(r/2\right)2^{r/2}} x^{r/2-1} e^{-x/2}, \quad a \le X < \infty$$

Fungsi pembangkit momen:

$$M(t) = \frac{1}{(1-2t)^{r/2}}; \quad t < \frac{1}{2}$$

Mean:

$$\mu = r$$

Variansi:

$$\sigma^2 = 2r$$

Distribusi Normal X~ N(μ,σ²)

Fungsi densitas:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\left(x-\mu\right)/\sigma\right)^2}, \quad -\infty < X < \infty$$

Fungsi pembangkit momen:

$$M(t) = \exp\left(\frac{\mu t + \sigma^2 t^2}{2}\right)$$

Mean:

$$\mu = E(X)$$

Variansi:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Distribusi Normal

- merupakan distribusi peluang kontinyu ***terpenting*** dalam statistika
- disebut juga ***Distribusi Gauss***
- grafiknya disebut ***kurva normal***
- kurvanya berbentuk seperti ***Genta*** atau ***Lonceng***

Kurva Normal

- Propertinya sebagai berikut :

1. Memiliki modus, median, dan mean pada satu titik
2. Kurva berbentuk simetri terhadap sumbu vertikal yang melewati μ
3. Kurva memiliki titik belok pada $x= \mu \pm \sigma$
4. Kurva normal mencapai sumbu horizontal secara asimptot

Tabel 4 Luas di bawah kurva normal

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
−3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
−3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
−3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
−3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
−3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
−2,9	0,0019	0,0018	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
−2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
−2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
−2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
−2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
−2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
−2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
−2,2	0.0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
−2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
−2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
−1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
−1,8	0,0359	0,0352	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
−1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
−1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
−1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
−1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0722	0,0708	0,0694	0,0681
−1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
−1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0.1038	0,1020	0,1003	0,0985
−1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
−1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
−0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
−0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
−0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
−0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
−0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
−0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
−0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
−0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
−0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
−0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,0	0,5000	0.5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133

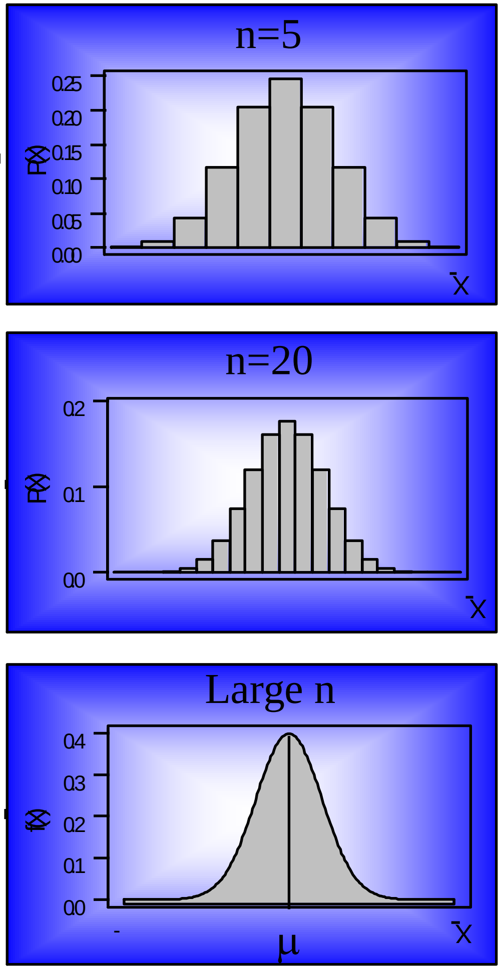
Teorema Limit Pusat

Bila $\overline{X}$ rataan sampel ukuran acak n yang diambil dari populasi dengan rataan μ dan variansi σ^2 yang berhingga, maka bentuk limit dari distribusi $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Bila n→ ∞ ialah distribusi normal baku $n(z,0,1)$

Seberapa besar ukuran sampel n: 5? 20? or 100?

Hampiran normal untuk $\overline{X}$ umumnya cukup baik bila n≥ 30



Teorema Limit Pusat

IndoAuto membuat engine dengan rata-rata power 220 hp dan deviasi standar 15 hp. IndoJeep memeriksa 100 sampel, berapa probabilitas power kurang dari 217 hp?

$$P(\bar{X} < 217) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{217 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right)$$

$$= P\left(Z < \frac{217 - 220}{\frac{15}{\sqrt{100}}} \right) = P\left(Z < \frac{217 - 220}{\frac{15}{10}} \right)$$

$$= P(Z < -2) = 0.0228$$

Contoh Penerapan Distribusi Normal

Sebuah perusahaan bolam lampu mengetahui bahwa umur lampunya (sebelum putus) terdistribusi secara normal dengan rata-rata umurnya 800 jam dan standard deviasinya 40 jam. Carilah probabilitas bahwa sebuah bolam produksinya akan:

- Berumur antara 778 jam dan 834 jam
- Berumur kurang dari 750 jam atau lebih dari 900 jam

Jawab.

$\mu = 800$ $\sigma = 40$.

- $P(778<x<834)$

  $x_1=778 \rightarrow z_1 = (x_1-\mu)/\sigma = (778-800)/40 = -0.55$

  $x_2=834 \rightarrow z_2 = (x_2-\mu)/\sigma = (834-800)/40 = 0.85$

  $P(778<x<834) = P(-0.55<z<0.85) = P(z<0.85)-P(z<-0.55)$

  $= 0.8023 - 0.2912 = 0.5111$

Contoh Penerapan Distribusi Normal

b) Berumur kurang dari 750 jam atau lebih dari 900 jam

μ= 800 σ=40.

$P(x< 750 \text{ atau } x>900)$

$x_1=750 \rightarrow z_1 = (x_1-\mu)/\sigma = (750-800)/40 = -1.25$

$x_2=900 \rightarrow z_2 = (x_2-\mu)/\sigma = (900-800)/40 = 2.5$

$P(x< 750 \text{ atau } x>900) = P(z<-1.25) + P(z>2.5)$

$= P(z<-1.25) + 1- P(z<2.5)$

$= 1 + P(z<-1.25) - P(z<2.5)$

$= 1 + 0.1056-0.9938 = 0.1118$